به نام خدا

---

مثال 1 - یک جعبه حاوی $N$ ترانزیستور داریم. از این $N$ ترانزیستور، $M$ تای آنها خراب است $(M \leq N)$ یک ترانزیستور را به صورت تصادفی از این جعبه برمی‌داریم، آن را تست می‌کنیم و دوباره به جعبه برمی‌گردانیم. این آزمایش را $n$ بار تکرار می‌کنیم. (تکرار مستقل و در شرایط یکسان) احتمال این پیش‌آمد را حساب کنید که $k$ ترانزیستور از این $n$ ترانزیستور تست شده، خراب باشند. (پیش‌آمد $A$)

می‌دانیم که اگر آزمایش یک بار انجام دهیم،

احتمال خراب بودن ترانزیستور $= \frac{M}{N}$

$\Leftarrow$ احتمال سالم بودن ترانزیستور $= 1 - \frac{M}{N}$

$$\Longrightarrow \quad P(A) = P_n(k) = \binom{n}{k} \left(\frac{M}{N}\right)^{k} \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-k}$$

یادآوری: با توجه به تشابه $P_n(k)$ و ضرایب بسط دوجمله‌ای می‌توان نوشت،

$$(p+(1-p))^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1$$

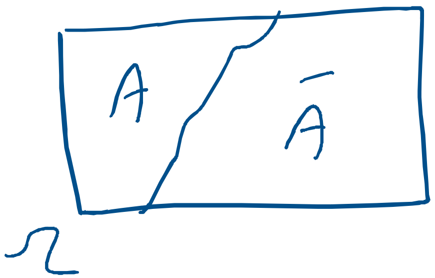
---

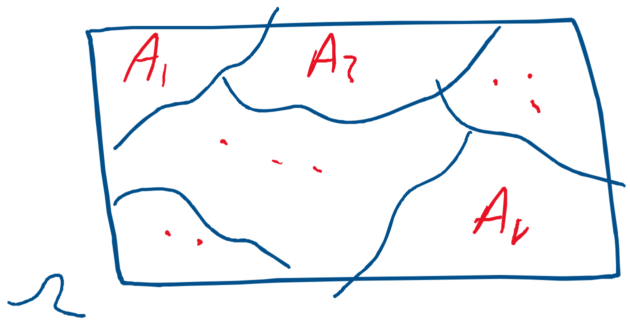
$$(p+(1-p))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

## تعمیم آزمایش برنولی به تعداد حالت بیشتر از دو حالت

همان طور که گفتیم آزمایش برنولی برای مدل سازی آزمایش های تصادفی که نتایج آنها شامل دو حالت است (یا به طور کلی رخداد پیشامد مورد نظر در رخ ندادن آن) استفاده کرد.

آزمایش برنولی را می توانیم به تکرار مستقل در شرایط یکسان یک آزمایش تصادفی تعمیم دهیم که نتایج آن شامل پیشامدهای $A_1, A_2, \ldots, A_k$ باشند به طوری که $A_1, \ldots, A_k$ فضای نمونه را افراز کنند.



اگر آزمایش تصادفی را $n$ بار تکرار کنیم و بخواهیم که پیش‌آمد $A_i$ به تعداد $k_i$ بار تکرار شود،

احتمال این پیش‌آمد برابر خواهد بود با (اگر ترتیب مهم باشد)

$$\prod_{i=1}^{r} P_i^{k_i} = P_1^{k_1} P_2^{k_2} \cdots P_r^{k_r} \quad , \quad \sum_{i=1}^{r} k_i = n$$

$$P(A_i) = P_i \quad , \quad \sum_{i=1}^{r} P(A_i) = \sum_{i=1}^{r} P_i = 1$$

اگر ترتیب مهم نباشد، برابر است با

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$$

$$= \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} \prod_{i=1}^{r} p_i^{k_i}$$

مثال ۲: یک جعبه شامل 30 گوی داریم که اعداد 1 تا 3 روی آنها نوشته شده است. اگر بدانیم که بر روی 10 گوی عدد 1، بر روی 13 گوی عدد 2 و روی 7 گوی عدد 3 نوشته است، آزمایش تصادفی برداشتن یک گوی، ثبت شماره آن و بازگرداندن آن را به جعبه به تعداد 5 بار تکرار می‌کنیم. احتمال پیشامدهای زیر را حساب کنید.

1) A: آنکه اعداد ثبت شده به صورت $(1, 1, 2, 3, 2)$ باشد.

2) B: آنکه 2 بار یک، دو بار 2 و یک بار 3 ظاهر شود.

در هر بار انجام آزمایش

$$\underbrace{P(A_1)} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

احتمال ظاهر شدن گوی با شماره یک

$$P(A_2) = \frac{13}{30} \quad , \quad P(A_3) = \frac{7}{30}$$

$$\Longrightarrow P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{13}{30} \times \frac{7}{30} \times \frac{13}{30} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{7}{30}\right)^1 \left(\frac{13}{30}\right)^2$$

$$P(B) = \binom{5}{2,1,2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{7}{30}\right)^1 \left(\frac{13}{30}\right)^2$$

مثال ۳- در آزمایشگاه به مقاومت‌هایی نیاز داریم که مقدار آنها دقیقاً برابر $10\Omega$ باشد. اگر بدانیم که ٪1 مقاومت‌های خریداری شده از بازار، این خصوصیت را دارند. چه تعداد مقاومت باید خریداری کنیم که با احتمال 0.95 دست کم یکی از آنها خصوصیت مورد نظر ما را داشته باشد؟

در این مسأله اگر فرض کنیم که $n$ مقاومت خریداری شده است، می دانیم احتمال اینکه دست کم یکی از آنها برابر $10\Omega$ باشد، برابر $0.95$ است. (احتمال اینکه یک مقاومت خاص دقیقا برابر $10\Omega$ باشد، هم برابر $0.01$ است) این پیشامد را $A$ نمایش می دهیم

$A =$ $\underbrace{\text{اینکه یکی از مقاومت‌ها} = 10}_{A_1}$ $\cup$ یا $\underbrace{\text{دومین مقاومت} = 10}_{A_2}$ $\cup$ یا ...... $\cup$ یا $\underbrace{n \text{ امین مقاومت} = 10}_{A_n}$

$$P(A) = 0.95$$

باید $P(A)$ را برحسب $n$ محاسبه کنیم و معادله $P(A) = 0.95$ را حل کنیم و $n$ را بدست بیاوریم.

با توجه به اینکه پیش آمد $A$، اجتماع $n$ پیش آمد دیگر است، لازم است که احتمال این $n$ پیش آمد را محاسبه کنیم. یک راه حل متداول برای حل کردن چنین مسائلی این است که پیش آمد مکمل آن را بررسی کنیم و در صورتی که محاسبه ی آن پیش آمد مکمل ساده تر باشد، از آن استفاده کنیم. می دانیم که

$\bar{A}$ = اینکه هیچ مقداری از بین $n$ ماست خریداری شده برابر 100 نباشد

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.95 = 0.05$$

از طرف دیگر داریم

$$P(\bar{A}) = \binom{n}{0} (0.01)^0 (1-0.01)^n = 0.05$$

$$\Rightarrow (0.99)^n = 0.05$$

$$\Rightarrow n \log 0.99 = \log 0.05$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log 0.05}{\log 0.99} = 298$$

مثال ۴ - نوعی دیود در اختیار داریم که احتمال اینکه تا قبل از 1000 ساعت کار خراب شوند، برابر 0.15 است. فرض می‌کنیم که به تعداد 100 عدد از این دیود خریداری شده است. احتمال اینکه 95 تا یا بیشتر از این دیودها قبل از 1000 ساعت کار خراب شوند، چقدر است؟ (پیش آمد C)

احتمال اینکه دیود تا قبل از 1000 ساعت کار خراب بشود $P_A = 0.15$ $\Longrightarrow$ $1 - P_A = 0.85 = P_{\bar{A}}$

احتمال اینکه دیود قبل از 1000 ساعت کار سالم باشد

$$P(C) = \sum_{i=95}^{100} \binom{100}{i} (0.15)^{i} (0.85)^{100-i}$$

$C =$ اینکه $\overbrace{\text{۹۵ تا یا بیشتر}}^{\text{مینیمم ۹۵ تا}}$ از این دیودها قبل از ۱۰۰۰ ساعت خراب شوند

$C =$ اینکه $\underbrace{\text{۵ تا یا کمتر}}_{\text{ماکزیمم ۵ تا}}$ از این دیودها قبل از ۱۰۰۰ ساعت سالم باشند

$$P(C) = \sum_{j=0}^{5} \binom{100}{j} (0.85)^{j} (0.15)^{100-j}$$

اگر ترتیب مهم نباشد

$$\binom{n}{k} P_A^{k} \, P_{\bar{A}}^{n-k} = P_n(k)$$

اگر ترتیب مهم باشد

$$P_A^{k} \, P_{\bar{A}}^{n-k}$$

آزمایش را $n$ بار تکرار کنیم

احتمال اینکه پیش آمد مورد نظر $k$ بار رخ دهد

$$P_A + P_{\bar{A}} = 1$$

## * متغیرهای تصادفی — Random Variables (RV)

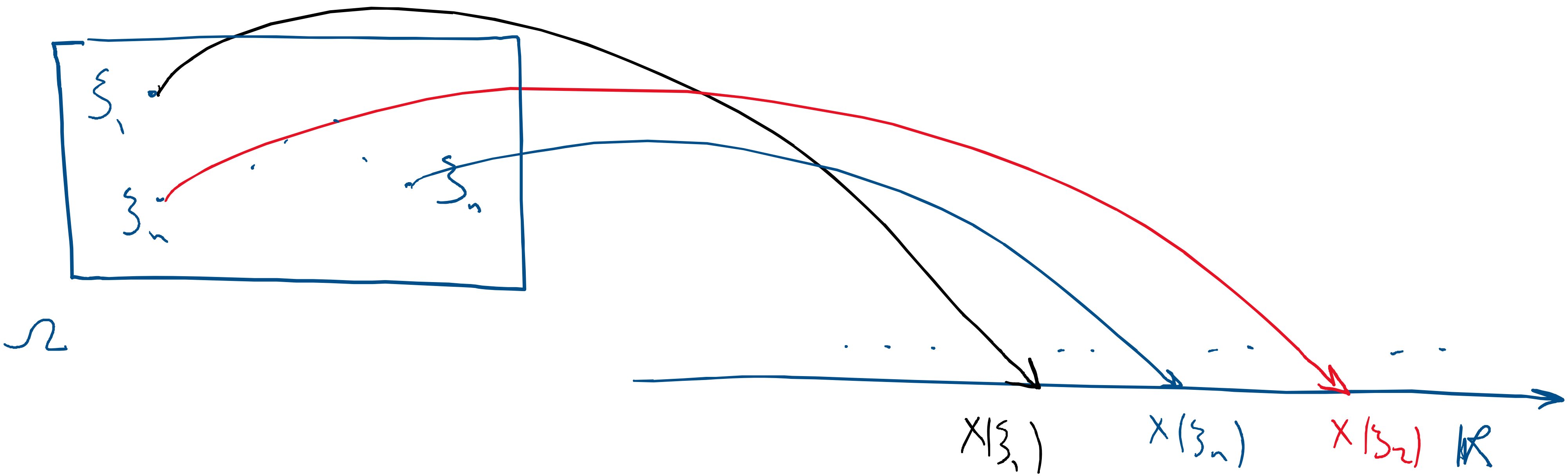
در بخش قبل با مفهوم احتمال و روشهای مختلف محاسبه ی احتمال پیش آمدها، آشنا شدیم.

در این بخش می خواهیم با مفهوم متغیر تصادفی به عنوان یکی از ابزارهای کارکردن و مدل سازی

پیش آمدهای تصادفی (آزمایش های تصادفی) آشنا شویم.

متغیر تصادفی $X(\xi)$ تابعی است که فضای نمونه را به محور اعداد حقیقی تصویر می‌کند. به عبارت دیگر به هر نقطه از فضای نمونه یک عدد حقیقی نسبت می‌دهد.

$\Omega \xrightarrow{X(\cdot)} \mathbb{R}$ یا $X : \Omega \to \mathbb{R}$



به این ترتیب می توانیم نتایج غیرعددی آزمایش های تصادفی را به اعداد حقیقی متناظر کنیم در این صورت از فضای احتمال $(\Omega, P, F)$ به فضای حقیقی $(\mathbb{R}, P, \mathbb{B})$ می رسیم.

$\Omega$: فضای نمونه

$P$: تابع احتمال

$F$: مجموعه ای از پیش آمدهای احتمال پذیر

$\mathbb{R}$: مجموعه اعداد حقیقی

$P$: تابع احتمال

$\mathbb{B}$: Borel field

$\sigma$-field

هدف این است که بتوانیم با متغیرهای تصادفی در فضای اعداد حقیقی کار کنیم، حضورهای آنها را استخراج کنیم، آنها را تجزیه و تحلیل کنیم و احتمال پیش آمدهای مرتبط با متغیرهای تصادفی را به دست بیاوریم. به همین دلیل در ادامه لازم است که ابزارهایی برای کار کردن با این متغیرهای تصادفی معرفی کنیم. اولین تابعی که به ما در تعریف این ابزارها کمک می کند، تابع احتمال است (که در هر دو فضا، مشترک است) ابتدا با چند مثال ساده، مفهوم متغیر تصادفی را بررسی خواهیم کرد و سپس به معرفی ابزارهای کار با متغیرهای تصادفی می پردازیم.

مثال ۱ - یک سکه را یک بار پرتاب می کنیم. فرض می کنیم که احتمال شیر آمدن برابر P باشد. همان طور که می دانیم، این آزمایش، یک آزمایش برنولی است که نتیجه آن فقط دو حالت ممکن (شیر یا خط) (H یا T) را شامل می شود.

$$\zeta_1 = H \qquad P_r\{H\} = P \implies P_r\{T\} = 1-P$$

$$\zeta_2 = T$$

می توانیم در ارتباط با این آزمایش تصادفی، یک متغیر تصادفی به صورت زیر تعریف کنیم.

$$X(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi = H \qquad \text{با احتمال } p \\ 0 \; (\text{یا } -1) & \xi = T \qquad \text{با احتمال } 1-p \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad X(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{با احتمال } p \\ 0 \; (\text{یا } -1) & \text{با احتمال } 1-p \end{cases}$$

این متغیر تصادفی را به طور کلی برای مدل سازی آزمایش برنولی می‌توان استفاده کرد.

در حالت کلی اگر رخداد پیش‌آمد مورد نظر $A$ با $P(A) = P$ را در آزمایش برنولی در نظر داشته باشیم، این متغیر تصادفی قابل استفاده است.

$$X(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{با احتمال } P \\ 0 \ (\text{یا } -1) & \text{با احتمال } 1-P \end{cases}$$

به این متغیر تصادفی، متغیر تصادفی برنولی می‌گوییم.

مثال 2 - آزمایش پرتاب سکه را 5 بار انجام می دهیم. می خواهیم متغیر تصادفی تعریف کنیم که نشان دهنده تعداد رخداد شیر در 5 بار تکرار آزمایش تصادفی باشد.

$$\Omega = \{H, T\} \quad , \quad \Omega_5 = \Omega^5$$

متغیر تصادفی $Y(\xi)$ : نشان دهنده تعداد رخداد شیر در 5 بار تکرار آزمایش تصادفی

$$Y(\xi) = y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\Omega_5 = \{ \underbrace{(T,T,T,T,T)}, \underbrace{(T,H,T,T,T)}, \ldots, \underbrace{(H,H,T,T,T)}, \ldots$$

$$\ldots\ldots, \underbrace{(H,H,H,H,H)} \}$$

تعداد رخداد شیر = ۰

تعداد رخداد شیر = 1

تعداد رخداد شیر = ۵

تعداد رخداد شیر = ۲

$$Y(s) = y \in \{0, 1, \ldots, 5\}$$

$$Y(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{احتمال ؟} \\ 1 & \text{احتمال ؟} \\ 2 & \sim \\ 3 & \sim \\ 4 & \sim \\ 5 & \sim \end{cases}$$

$$P_r\{Y(\xi)=y\} = \binom{s}{y} p^{y} (1-p)^{s-y}$$

$$y \in \{0,1,\dots,s\}$$

به طور کلی اگر آزمایش برنولی را $n$ بار تکرار کنیم و پیش آمد مورد نظر $A$ با احتمال

$P(A)=p$

ابتدا، متغیر تصادفی $Y(\xi)$ که نشان دهنده‌ی تعداد رخداد پیش آمد مورد نظر در $n$ بار تکرار آزمایش

تصادفی است، به صورت زیر مشخص می‌شود

$$Y(\xi) = y \quad , \qquad y \in \{0, 1, \dots, n\}$$

$$P_r\{Y(\xi) = y\} = \binom{n}{y} p^{y} (1-p)^{n-y}$$

این متغیر تصادفی را متغیر تصادفی دوجمله‌ای می‌نامیم.

• برای سادگی نوشتار، معمولاً $\xi$ را به صورت مستتر در نظر می‌گیریم. یعنی

$$X(\xi) \equiv X$$

برای اختصار

* متغیرهای تصادفی را با حروف بزرگ (Capital letters) نمایش می‌دهیم.

* مقادیری که متغیرهای تصادفی اختیار می‌کنند را با حروف کوچک (small letters) نمایش می‌دهیم

$X(\xi) = x$ یا $X = x$

www.dr-haghbin.info/courses/under-grad

LMS.dr_haghbin.info